## 1- Analyse dimensionnelle.

L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$, où $P$ désigne la pression, $V$ le volume, $T$ la température, $n$ le nombre de moles et $R$ la constante des gaz parfaits. Montrer que la pression est une force par unité de surface. On donne $R = 8{,}31\, J.mol^{-1}.K^{-1}$.

$P = nRT/V \Rightarrow [P] = N(ML^2T^{-2})N^{-1}\theta^{-1}\theta/L^3 = (MLT^{-2})L^{-2}$ [2]

Or $MLT^{-2}$ est l'unité une force. La pression correspond bien une force par unité de surface [1]

## 2- Calcul d'erreur et calcul d'incertitude.

On étudie un pendule oscillant dont la période propre est donnée par $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. On mesure la période d'oscillation $T = 2 \pm 0{,}1$ s et la longueur $L = 1 \pm 0{,}005$ m.

2.1 Calculer la valeur de l'accélération de la pesanteur $g$.

2.2 Calculer analytiquement l'incertitude relative sur $g$. Calculer numériquement l'incertitude absolue.

$g = 4\pi^2 L/T^2 = 9{,}869\ m.s^{-2}$ [0,5]

$\Delta g/g = \Delta L/L + 2\Delta T/T$ [1]

$\Delta g = g(\Delta L/L + 2\Delta T/T) = 1{,}036\ m.s^{-2}$ [0,5]

## 3- Oscillateur harmonique amorti.

On considère un circuit alimenté par un générateur de tension continue $U$, constitué par l'association en série d'une résistance ($R$ = 100 Ω), d'un condensateur de capacité $C$ = 0,1 µF, et d'une bobine d'inductance $L$ = 100 mH.

3.1 Faire le schéma du montage.

Schéma [0,5]

3.2 Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge $q$ au cours du temps $t$ s'écrit : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q(t) = \frac{U}{L}$ [Equation 1]

$U_R + U_L + U_C = U \Leftrightarrow Ri + L\,di/dt + q/C = U$ [1]

Or $i = dq/dt$ d'où le résultat [1]

3.3 Que représentent les termes $1/\tau$ et $\omega_o$ ? Expliciter $\tau$ et $\omega_o$ et calculer leurs valeurs numériques (préciser les unités).

$1/\tau$ est le terme d'amortissement et $\omega_o$ est la pulsation propre. [0,5]x2

$\tau = R/L = 10^{-3}\ s$ [0,5]x2

$\omega_0 = 1/(LC)^{1/2} = 10^4\ s^{-1}$ [0,5]x2

3.4 Les solutions de l'équation générale sans second membre (SGSSM) sont du type $A\exp(rt)$. Donner l'équation caractéristique du deuxième degré en fonction de $r$.

$dq/dt = Ar\exp(rt)$ et $d^2q/dt^2 = Ar^2\exp(rt)$ [0,5]

d'où $r^2 + r/\tau + \omega_0^2 = 0$ [1]

3.5 Calculer le discriminant $\Delta$ et donner la condition pour obtenir des solutions oscillantes (sinusoïdales). Cette condition est-elle vérifiée dans le cas du circuit étudié ?

$\Delta = 1/\tau^2 - 4\omega_0^2$ [0,5]
Solutions oscillantes si $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1/\tau < 2\omega_0$ [1]
Cette condition est vérifiée dans notre cas : $10^3 < 2\ 10^4$ [0,5]

3.6 Donner les deux solutions $r_1$ et $r_2$ de l'équation caractéristique et en déduire que la SGSSM s'écrit : $\underline{q_g}(t) = \exp(-\alpha t)\left[A_1 \exp(i\Omega t) + A_2 \exp(-i\Omega t)\right]$. Expliciter $\alpha$ et $\Omega$ en fonction de $\tau$ et $\omega_o$.

$r_1 = (1/2)\left[-1/\tau + i\left(4\omega_0^2 - 1/\tau^2\right)^{1/2}\right] = (1/2\tau)\left[-1 + i\left(4\omega_0^2\tau^2 - 1\right)^{1/2}\right]$ [0,5]
$r_2 = (1/2)\left[-1/\tau - i\left(4\omega_0^2 - 1/\tau^2\right)^{1/2}\right] = (1/2\tau)\left[-1 - i\left(4\omega_0^2\tau^2 - 1\right)^{1/2}\right]$ [0,5]
$\underline{q_g}(t) = \exp(-\alpha t)\left[A_1 \exp(i\Omega t) + A_2 \exp(-i\Omega t)\right]$ [1]
avec $\alpha = 1/2\tau$ et $\Omega = (1/2)\left(4\omega_0^2\tau^2 - 1\right)^{1/2} = \sqrt{Q^2 - 1/4}$ si $Q = \omega_0\tau$ [0,5]x2

3.7 Trouver la solution particulière $\underline{q_p}(t)$ de l'équation avec second membre.

$U = Cste \Rightarrow q_p = U/L\omega_0^2 = CU$ [1]

3.8 Ecrire la solution générale de l'équation différentielle (on ne demande pas de calculer les constantes $A$ et $B$). Justifier les notions de régime transitoire et de régime permanent.

$q = q_p + q_g = CU + \exp(-\alpha t)\left[A_1 \exp(i\Omega t) + A_2 \exp(-i\Omega t)\right]$ [0,5]
$A$ et $B$ sont déterminées à partir des conditions initiales [0,5]
Le premier terme correspond au régime permanent et le second au régime transitoire (il devient négligeable pour $t \gg \tau$). [0,5]x2